

**PECE – PROGRAMA DE EDUCAÇÃO CONTINUADA DA ESCOLA
POLITÉCNICA DA USP**

Felipe Moreno Caparrós

**APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE MUDANÇAS ABRUPTAS PARA
PREDIÇÃO DE CRISES EM MERCADOS UTILIZANDO
TRANSFORMAÇÃO WAVELET**

São Paulo, 05 de fevereiro de 2018.

Felipe Moreno Caparrós

**APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE MUDANÇAS ABRUPTAS PARA
PREDIÇÃO DE CRISES EM MERCADOS UTILIZANDO
TRANSFORMAÇÃO WAVELET**

Relatório final, apresentado a
Universidade de São Paulo, como parte
das exigências para a obtenção do título
de MBA em engenharia financeira.

São Paulo, 05 de fevereiro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio de Menezes

Prof. Dr. Roberto Moura Sales

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a toda minha bela família, que se estende aos amigos, pois são a base não somente para esta conquista, mas para todas as conquistas diárias que compõem minha trajetória.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos colegas de sala, professores, e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que essa oportunidade existisse, fosse aceita e concluída com sucesso.

O correr da vida embrulha tudo. A vida é assim: esquentando e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem.

(Guimarães Rosa)

RESUMO

Quanto mais cenários disruptivos acontecem na economia mundial, mais os modelos quantitativos de previsão de crises são questionados se de fato fizeram seu papel de essência, ou seja, alarmar os detentores de posição contrária ao do movimento antes que os prejuízos se realizem.

Métodos tradicionais de análise de sensibilidade de riscos associados às séries financeiras se baseiam pelo cálculo do desvio-padrão em janelas históricas dos instrumentos de interesse, sensibilidade conhecida por volatilidade do instrumento, porém tal medida não traduz em alarme especificamente, apenas aponta que os níveis de retorno estão se descolando do comportamento médio da janela, como pode ser percebido na figura 1, onde, para o Índice Ibovespa, perante uma forte crise mundial observada entre maio e novembro de 2008, o preço de fechamento teve uma variação de mais de 100% entre o máximo e o mínimo do período, sem grandes alertas na medição da volatilidade em janela de vinte e um dias.

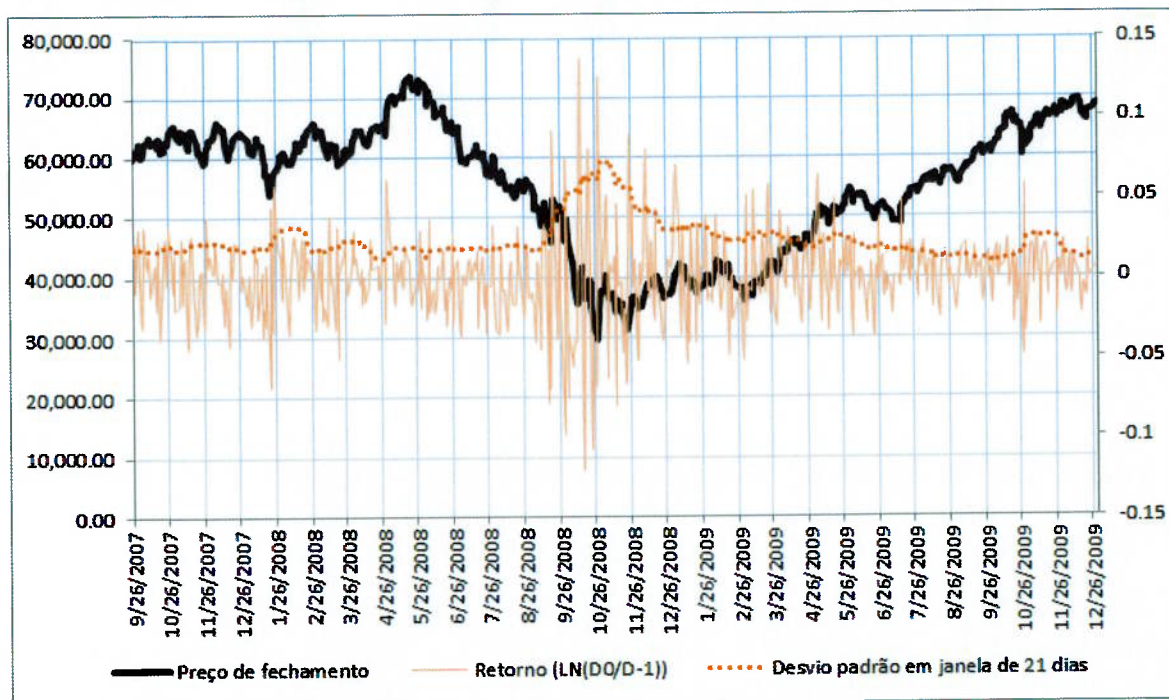


Figura 1: Preço e volatilidade do Índice Ibovespa, crise de 2008. Fonte: Yahoo Finance

A missão de prever cenários de crise claramente carece e recebe muita atenção, tanto por parte dos investidores quanto dos próprios órgãos reguladores, responsáveis pela saúde dos sistemas financeiros globais, porém, é nítida a distância que o mercado financeiro se encontra da atraente antecipação de crises.

Com a constante evolução do computador, técnicas descobertas no século XIX por importantes figuras da história da matemática e da física estão sendo visitadas e adaptadas para o mercado financeiro, principalmente depois dos anos 1990, fomentando uma importante evolução para todos os agentes que tomam e dão posições no mercado.

Este estudo acata um desafio abstrato publicado no livro de Mudanças Abruptas (Leonel Caetano, 2013) para uma avaliação próxima e tangível do direcionamento passado pelo autor, alimentando o assunto para posteriores avanços e conclusões sobre a possibilidade real de se prever uma crise de mercado.

Palavras chave: Mercado financeiro, predição de crises, mudanças abruptas, séries temporais, modelagem, *wavelet*.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1: Preço e volatilidade do Índice Ibovespa, crise de 2008. (pág. iv)
- Figura 2: Diferentes famílias de *wavelets*. (pág. 15)
- Figura 3: Transformada *wavelet* aplicada sobre uma série temporal. (pág. 16)
- Figura 4: Ilustração da transformação *wavelet*. (pág. 21)
- Figura 5: Partição do plano em tempo-frequência. (pág. 21)
- Figura 6: Utilização da função *polyfit* em Matlab. (pág. 23)
- Figura 7: Resultado da subtração das funções plotadas na figura 6. (pág. 24)
- Figura 8: Aplicação da função FFT nos dados dispostos na figura 7. (pág. 24)
- Figura 9: Subtração das funções plotadas na figura 8. (pág. 25)
- Figura 10: Aplicação da transformação *wavelet* sobre a figura 9. (pág. 25)
- Figura 11: Cálculo IMA sobre a transformada *wavelet*. (pág. 26)
- Figura 12: Maior IMA obtido sobre o índice Ibovespa. (pág. 27)
- Figura 13: Maior IMA obtido sobre o índice SPX. (pág. 28)
- Figura 14: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. Ibovespa. (pág. 29)
- Figura 15: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. Ibovespa. (pág. 29)
- Figura 16: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. Ibovespa. (pág. 30)
- Figura 17: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. Ibovespa. (pág. 30)
- Figura 18: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. S&P500. (pág. 31)
- Figura 19: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. S&P500. (pág. 31)
- Figura 20: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. S&P500. (pág. 32)

LISTA DE ABREVIATURAS

BVSP Nomenclatura do *ticker* do índice Ibovespa

CWT *Continuous Wavelet Transform*

IMA Índice de mudanças abruptas

MRA *Multiresolution analysis*

SPX Nomenclatura do *ticker* do índice S&P500

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
EPÍGRAFE	iii
RESUMO	iv
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	vi
LISTA DE ABREVIATURAS	vii
SUMÁRIO	viii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivo	2
1.3 Justificativa	2
1.4 Estrutura do trabalho	3
2 Referencial teórico e revisão bibliográfica	4
2.1 Mercado Financeiro: Introdução	4
2.2 Mercado primário e mercado secundário	5
2.3 Mercado Acionário	6
2.4 Riscos do mercado de ações	8
2.5 Séries temporais	9
2.6 Processos estocásticos e esperança	9
2.7 Índices do mercado acionário	11
2.8 Identificação de frequências e padrões	12
2.9 Introdução à teoria <i>wavelet</i>	14
2.10 <i>Wavelets</i>	16
2.11 Equação de dilatação e equação <i>wavelet</i>	18
2.12 Decomposição da função no plano V_0	20
2.13 IMA – Índice de mudanças abruptas	21

3	Metodologia.....	23
3.1	Coleta de dados.....	23
3.2	Eliminação de tendências na série financeira	23
3.3	Eliminação de sazonalidade na série financeira	24
3.4	Aplicação da transformação <i>wavelet</i>	25
3.5	Cálculo do IMA	26
4	Resultados	27
5	Conclusões	33
6	Bibliografia	34
7	Apêndices.....	36

1 Introdução

1.1 Motivação

Para atingir lucro, geração de valor e sustentabilidade, as empresas, através de investimento de seus acionistas, se deparam com inúmeras variáveis para gestão dos seus objetivos, variáveis essas necessárias não somente para a prospecção (visão proativa), mas também para a gestão dos riscos inerentes das operações intrínsecas aos negócios. Dentro desse amplo contexto, e de muitos outros obviamente, a profundidade estatística e a previsibilidade do comportamento de determinados instrumentos financeiros, tais como retorno de ações, taxas de juros ou de câmbio, por exemplo, são essenciais para atingimento da almejada solidez, fatores que motivam o estudo e o refinamento das diversas modelagens existentes para predição de fenômenos a partir da coleta empírica de dados disponíveis nas incontáveis operações que transitam diariamente pelo mercado financeiro.

O mercado financeiro é o parque disponível para que ocorram as operações comerciais, de empréstimo e de investimento, por meio de agentes especializados que utilizam diversos instrumentos para atender as demandas de tomadores de recursos e investidores (Fernandes Andrezo & Siqueira Lima, 2012).

Estudar o comportamento de determinadas variáveis é fundamental para a gestão dos negócios e, nesse contexto, a estatística e a econometria desempenham um papel fundamental. O uso de métodos dessas áreas permite a análise dos fenômenos econômicos a partir de modelos matemáticos, os quais são uma representação simplificada de um processo real, onde é possível medir e calibrar os erros intrínsecos da representação com certo intervalo de confiança, informações valiosas para a tomada de decisão e posicionamento estratégico, possibilitando prever aumento de lucros, reinvestimentos, proteções aos riscos inerentes à própria operação da empresa e às operações especificamente financeiras, garantia de liquidez, entre muitos outros aspectos saudáveis para as empresas.

Para propósitos de previsão, um modelo simples, que descreva o comportamento de uma variável, ou conjunto de variáveis, em termos de valores

passados, sem necessariamente ter o emprego de uma teoria complexa, pode ser muito satisfatório, resultado que este estudo se dispõe a revelar.

1.2 Objetivo

Este estudo tem por objetivo implementar computacionalmente metodologia disposta em pesquisas de antecipação de crises financeiras, utilizando aproximações e técnicas avançadas de modelagem de séries temporais, direcionado para estudo específico referente a mudanças abruptas e como elas podem ser percebidas preventivamente através da intensidade das frequências que o fenômeno carrega.

Com a finalidade de demonstrar a eficácia desta metodologia, serão apresentados os principais resultados alcançados no estudo de dois índices disponíveis no mercado, termômetros do mercado financeiro de países como Brasil, índice denominado Ibovespa, sigla BVSP, e Estados Unidos, através do seu índice SP&500, sigla SPX, que concentra o setor de alta capitalização, parte importante do valor total do mercado norte americano.

O estudo não tem pretensão de ser conclusivo e necessita de maior investimento e aprofundamento dos comportamentos para demais mercados e crises.

1.3 Justificativa

A instabilidade do cenário econômico do Brasil somado aos grandes acontecimentos mundiais são variáveis severas e imprevisíveis que compõem a realidade da administração das empresas brasileiras. Estar atento aos principais cenários que afetam a atividade específica da empresa e por consequência sua economia deixou de ser um diferencial competitivo e passou a ser condição de sobrevivência. Muitos desses efeitos “imprevisíveis” podem ser percebidos no preço com que as ações das companhias abertas são negociadas no mercado, fato que deve ser aproveitado pela alta administração, resumindo a complexidade global em indicadores tangíveis para as decisões estratégicas.

Em suma, acompanhar e estimar uma previsão do cenário futuro é uma realidade disseminada, investir na acurácia dos modelos é onde estão as maiores oportunidades de diferenciação competitiva.

1.4 Estrutura do trabalho

Observando a abrangência dos universos presentes nesse material, tais como mercado financeiro, computação, métodos quantitativos, modelagem matemática, dentre outros, a estrutura deste trabalho foi dividida entre conceitos introdutórios sobre o mercado financeiro e suas componentes e os conceitos referentes ao entorno físico-matemático que embasam e dão condição para a proposta do estudo.

As seções 2.1 a 2.4 apresentam definições e detalhes do mecanismo de operações no mercado financeiro e seu macro funcionamento, com maior foco no mercado acionário e seus riscos dada rentabilidade desconhecida, assim como tratado por **(Fernandes Andrezo & Siqueira Lima, 2012)** e **(Moura Cintra Goulart, Sampaio Franco de Lima, & Gregório, 2012)**.

As seções 2.5 e 2.6 apresentam principais conceitos e definições de séries temporais e processos estocásticos, embasando matematicamente os conceitos implícitos dispostos nas séries financeiras estudadas, assim como abordados por **(Hamilton, 1994)**.

As seções 2.8 e 2.13 são adaptadas essencialmente da publicação de **(Leonel Caetano, 2013)**.

As seções 2.9 a 2.12 apresentam a introdução da teoria *wavelet*, tema central da proposta do estudo, e foram traduzidos e adaptados essencialmente de **(Lai, 2015)**, **(Boggess & Narcowich, 2002)** e **(Leonel Caetano, 2013)**.

2 Referencial teórico e revisão bibliográfica

2.1 Mercado Financeiro: Introdução

Dois grandes temas definem o núcleo do sistema financeiro: Investimento e poupança. Poupança é a parte da renda não consumida, onde o indivíduo opta por trocar um poder de consumo imediato e certo por um poder de consumo futuro e incerto, geralmente quando há expectativa de maiores benefícios com essa decisão. Por outro lado, a utilização dos recursos poupados para fins de aumento de capacidade produtiva representa um investimento.

Na economia moderna, é possível dividir os agentes econômicos em dois grupos, no que se refere ao processo poupança-investimento: Unidades econômicas superavitárias ou poupadores, aqueles que apresentam desejo de investir inferior à capacidade de poupança, ou seja, possuem recursos em excesso e unidades econômicas deficitárias ou tomadores, aqueles que apresentam desejo de investir superior à capacidade de poupança, ou seja, necessitam de recursos.

Para o primeiro grupo, surge a questão de como aplicar os recursos em excesso, enquanto o segundo grupo preocupa-se em como obter recursos necessários à viabilização de seus projetos de investimento. É factível notar que esses problemas são complementares, de modo que a solução dos problemas de um grupo pode resolver também os problemas do outro. O mercado financeiro então consiste no conjunto de agentes e instrumentos destinados a oferecer alternativas de aplicação e captação de recursos financeiros.

Sob a ótica de finanças, é possível dividir o mercado financeiro entre o mercado de crédito e o mercado de capitais. O mercado de crédito é composto pelas operações de prazo curto, médio ou aleatório, comumente com possibilidade de resgate antecipado, como depósitos à vista, por exemplo, e destina-se basicamente ao financiamento do consumo e à disponibilização de recursos de curto e médio prazo para as empresas. O Mercado de capitais abrange operações de prazo médio, longo ou indeterminado, como o exemplo das ações, uma vez que, por definição, não são caracterizadas como exigibilidades perante a sociedade emissora e destinam-se principalmente ao financiamento de capital fixo e disponibilização de recursos de longo prazo para as empresas.

Para o mercado de capitais, foco deste estudo, as operações são normalmente efetuadas diretamente entre poupadores e tomadores, sem necessidade de intermediação por instituição financeira. Esse mercado abrange basicamente o conjunto de operações com valores mobiliários, os quais podem ser representativos de capital social no caso das ações. Além dos títulos de propriedade, existem também os títulos de dívida, como debêntures. Essas operações realizam-se principalmente em bolsas de valores e mercados de balcão.

2.2 Mercado primário e mercado secundário

Mercado primário é onde ocorre a primeira negociação entre a entidade emissora de um título, geralmente demandante por recurso para fins de capitalização ou financiamento, e o investidor, geralmente selecionando instrumentos de maior possibilidade de ganho, respeitando seu apetite ao risco. É o único instante onde se efetiva a captação de recursos pela entidade emissora. Após a aquisição de ativos financeiros pelos investidores no mercado primário, forma-se uma necessidade adicional de haver possibilidade de negociação desses títulos, uma vez não sendo mais interessante aos detentores. O mercado onde se negociam títulos e valores mobiliários anteriormente colocados no mercado primário denomina-se mercado secundário. Este abrange as negociações de transferência de títulos entre investidores, após já ter ocorrido a primeira venda. Portanto não há ingresso de recursos novos à entidade emissora, mas apenas um resgate de valor para quem o havia adquirido.

No mercado primário, as distribuições públicas de ações realizadas pela primeira vez em bolsa de valores são chamadas de “oferta pública inicial” – IPO (*Initial Public Offering*). Uma vez que suas ações passam a ser negociadas em bolsa de valores, as novas distribuições de ações são chamadas de emissões subsequentes, do termo em inglês *follow on*.

Importante reparar que o mercado primário é a colheita dos detentores de poupança através dos centros de liquidez, que podem ser bolsas ou mercados de balcão. Nesses centros de liquidez, os títulos podem ser negociados entre esses mesmos detentores de poupança, formando assim o mercado secundário.

Um dos principais títulos negociados no mercado são as ações de empresas, que são caracterizados pela menor parcela em que o capital social de uma companhia ou sociedade anônima é dividido, constituindo um título de participação a cada acionista que a detém, sendo que a responsabilidade dos acionistas é limitada ao preço de emissão das ações por eles subscritas ou adquiridas. A companhia pode ser aberta ou fechada, dependendo se os valores mobiliários de sua emissão são admitidos ou não admitidos à negociação em bolsa de valores ou mercado balcão e ofertados ao público de uma forma geral.

2.3 Mercado Acionário

O mercado de ações é um ambiente público e organizado para negociação de títulos mobiliários (ações, opções de ações etc.), utilizado para diferentes perspectivas pessoais ou empresariais. As transações podem ocorrer por intermédio das bolsas de valores ou nos chamados mercados de balcão (mercados em que são comercializados títulos não negociados em bolsas, dentro das normas legais previstas em lei e regulamentos, sem coordenação de entidades privadas de autorregulação).

No Brasil a única bolsa de valores em que são negociadas as ações é a BM&F Bovespa – Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros. As ações são negociadas em sistema eletrônico de negociação em que a oferta de compra ou venda é feita através de terminais de computador. O encontro das ofertas e o fechamento dos negócios são realizados automaticamente pela infraestrutura da BM&F Bovespa.

O mercado de balcão organizado, também administrado pela BM&F Bovespa, possui uma segmentação específica para esta finalidade. Tal segmento disponibiliza a listagem das ações lá registradas, com intuito de facilitar o acesso das empresas ao mercado acionário. Os maiores participantes desse segmento são aquelas que desejam ingressar no mercado de capitais de forma gradativa, destacando-se as empresas de pequeno e médio porte, que buscam crescer utilizando o mercado acionário como fonte de recursos.

Como pode ser consultado na regulamentação das operações financeiras na bolsa de valores, existem quatro formas básicas de negociação com ações:

Operação à vista: É a compra ou venda de uma determinada quantidade de ações. Quando há a realização do negócio, o comprador realiza o pagamento e o vendedor entrega as ações objeto da transação, no terceiro dia útil após a realização do negócio.

Operações a termo: São contratos para compra ou venda de uma determinada quantidade de ações, a um preço fixado, para liquidação em prazo determinado. O prazo do contrato a termo é livremente escolhido pelos investidores, respeitando um limite inferior e superior em dias corridos.

Opções de ações: São contratos que garantem o direito de compra ou venda de uma determinada ação dentro de um prazo estipulado, a um valor prefixado.

Operações no mercado futuro: São contratos de compra ou venda de ações, a um preço acordado entre as partes, para liquidação em uma data futura específica, previamente autorizada. Normalmente, o esperado é que o preço do contrato futuro de uma determinada ação seja equivalente ao preço à vista, acrescido de uma fração correspondente à expectativa de taxas de juros entre o momento da negociação do contrato futuro de ações e a respectiva data de liquidação do contrato formado.

Os preços das ações são formados em pregão, pela dinâmica das forças de oferta e demanda de cada papel, o que torna a cotação praticada um indicador confiável do valor que o mercado atribui às diferentes ações. A maior ou menor oferta e procura por determinado papel está diretamente relacionada ao comportamento histórico dos preços e, majoritariamente, às perspectivas futuras da empresa emissora, incluindo sua política de dividendos, divulgação da sua intenção de expansão de mercado e de seus lucros e influência da política econômica sobre as atividades da empresa.

Uma prática bastante atraente e disseminada entre os investidores é tentar interpretar o comportamento dos preços em modelos matemáticos, de maneira com que seja possível acertar os movimentos futuros, para maximizar lucros ou minimizar prejuízos. Conceitos matemáticos importantes associados ao comportamento dos

preços se fazem necessários para essa prática e serão dispostos adiante neste estudo.

2.4 Riscos do mercado de ações

O investimento em ações é considerado investimento de risco devido à incerteza na sua rentabilidade, reforçando a oportunidade que um bom modelo de predição possui. Os títulos de renda variável, como as ações, são caracterizados por terem sua remuneração dependente de eventos futuros incertos, como o desempenho de uma empresa, por isso não oferecem ao investidor uma rentabilidade garantida, previamente conhecida. Essa rentabilidade é composta de dividendos ou participação nos resultados e benefícios concedidos pela empresa emissora, além do eventual ganho de capital realizado na venda da ação no mercado secundário. O retorno do investimento dependerá de uma série de fatores, tais como desempenho da empresa, comportamento da economia brasileira e internacional, entre outros fatores.

As modelagens tradicionais de antecipação de movimentos bruscos nas direções dos preços dos ativos se dão pela apuração do desvio padrão referente há uma amostra (janela) sobre o cálculo do retorno dos preços. No jargão de mercado, o cálculo do desvio-padrão é conhecido como volatilidade e, quanto maior a discrepância do retorno quanto à sua média, mais arriscado e incerto é o movimento do preço, podendo levar ao lucro ou prejuízo expressivo. Os modelos tradicionais de volatilidade pressupõem distribuições estatísticas que não refletem a realidade do comportamento dos retornos. Tal suposição é a maior motivação do avanço em modelagens de predição de comportamento, como foco em interpretação da intensidade das frequências conforme evolução do tempo.

Independentemente da técnica aplicada sobre as séries, definições básicas de modelagem são necessárias, tais como séries temporais e processos estocásticos, assuntos que suportam a abordagem deste estudo e que serão vistas adiante.

2.5 Séries temporais

O comportamento dos preços pertinentes às séries financeiras são exemplos bastante típicos dentro de todo o universo de séries temporais, por isso é interessante e necessário definir tal conceito.

De maneira simples e objetiva, uma série temporal é um conjunto de observações de determinadas variáveis em certo número de instantes no tempo, usualmente uniformemente espaçadas. É a coleção de observações de valores variando em diferentes instantes de tempo. Os valores devem ser coletados em intervalos regulares, como instantes mensais, semanais, trimestrais, anuais, assim por diante. O conceito de séries temporais é utilizado em estatística, econometria, matemática financeira, estudos de fenômenos naturais, como predição de terremotos, entre muitos outros campos e exemplos.

Por (Menezes Reis, 2014), o objetivo da análise de séries temporais é identificar padrões não aleatórios na série temporal de uma variável de interesse, e a observação deste comportamento passado pode permitir fazer previsões sobre o futuro, orientando a tomada de decisões. A suposição básica que norteia a análise de séries temporais é que há um sistema causal mais ou menos constante, relacionado com o tempo, que exerceu influência sobre os dados no passado e pode continuar a fazê-lo no futuro. Este sistema causal costuma atuar criando padrões não aleatórios que podem ser detectados em um gráfico da série temporal, ou mediante algum outro processo estatístico.

2.6 Processos estocásticos e esperança

Um processo estocástico é dado por uma variável aleatória com dependência temporal, fato que traduz o comportamento dos preços de uma série financeira.

Mais genericamente, um processo estocástico pode ser expresso por uma coleção de valores aleatórios observados de tamanho T de uma variável Y_t qualquer.

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_T\},$$

Por exemplo, uma coleção independente e identicamente distribuída de tamanho T :

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_T\},$$

com

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Esta coleção independente específica é particularmente chamada de sequência Gaussiana de ruído branco.

A coleção observada representada por Y_t apresenta apenas um dos possíveis resultados do processo estocástico representado por ε_t que originou os dados assistidos. Mais a fundo, mesmo que se pudesse observar um período infinito de tempo

$$\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = \{\dots, y_{t-1}, y_0, y_1, \dots, y_T, y_{T+1}, \dots\},$$

a sequência infinita $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ poderia ainda ser vista como uma simples realização da série temporal. Outra forma de materializar essa abstração é gerar independentemente duas séries aleatórias de parâmetros iguais $N(0, \sigma^2)$, sendo $\{\varepsilon_t^{(1)}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ e $\{\varepsilon_t^{(2)}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ em dois computadores diferentes. Constataria-se duas realizações independentes de ruído branco Gaussiano.

Em maior escala, ao tomar uma série i de computadores gerando aleatoriamente sequências numéricas $\{y_t^{(1)}\}_{t=-\infty}^{\infty}, \{y_t^{(2)}\}_{t=-\infty}^{\infty}, \dots, \{y_t^{(i)}\}_{t=-\infty}^{\infty}$, pode-se selecionar uma amostra associada à data t para cada sequência:

$$\{y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(i)}\}$$

Esse processo pode ser descrito como i realizações da variável aleatória y_t . Essa variável aleatória possui uma densidade associada, denotada por $f_{y_t}(y_t)$, chamada de densidade incondicional de y_t . Por exemplo, para processos de ruídos brancos Gaussianos, essa densidade é definida por:

$$f_{y_t}(y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[\frac{-y_t^2}{2\sigma^2}\right]$$

A esperança da t-ésima observação da série temporal se refere à média dessa distribuição de probabilidades, desde que:

$$E(Y_t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} y_t f_{Y_t}(y_t) dy_t$$

Por exemplo, se $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ representa a soma da constante μ mais o ruído branco Gaussiano $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t$$

Significa que

$$E(Y_t) = \mu + E(\varepsilon_t) = \mu$$

Oportunamente, a esperança $E(Y_t)$ também é conhecida como média incondicional de Y_t , descrita como μ_t

$$E(Y_t) = \mu_t$$

Essa notação permite avaliar a média como sendo uma função considerando a data de observação t.

Os conceitos dispostos nesta seção são definições matemáticas que podem ser aplicados sobre os preços históricos das séries, visando interpretação e predição dos comportamentos futuros. Como visto, esta prática é bastante atraente e disseminada, porém, como toda modelagem é na verdade uma simplificação de um processo real, as premissas necessárias para as elaborações dos modelos são justamente os pontos divergentes quando o assunto é crise e movimento abrupto, cujo estudo objetiva explorar.

2.7 Índices do mercado acionário

Uma vez definido o mercado acionário e seus riscos e os conceitos de séries temporais e processos estocásticos, de maneira resumida, esta seção aborda basicamente um complemento de foco mais abrangente, extremamente relevante no sentido de tradução da economia de determinado conjunto, no caso, do mercado financeiro. Isto é, dada proposta de implementação de técnica de predição de crise em mercados, a aplicação dos estudos sobre um conjunto de informações cuja

definição é a tradução do comportamento do mercado dão maior sentido à proposta, mas que definitivamente pode ser extrapolada para universos mais particulares.

Comumente, as bolsas de valores de todo o mundo divulgam informações sobre índices que representam a evolução dos negócios e dos preços das ações negociada nos mercados. Os principais indicadores referem-se a preços e volumes das ações negociadas, que traduzem a liquidez do mercado. São elaborados também índices que mostram o comportamento do mercado como um todo ou segmentos específicos.

A implementação da técnica de avaliação de mudanças abruptas se dará sobre dois índices que refletem o mercado brasileiro e o mercado dos Estados Unidos respectivamente.

Para o Brasil, conforme **(BM&F Bovespa, 2015)**, o índice Bovespa (Ibovespa) é o mais importante indicador do desempenho do mercado de ações, pois retrata o comportamento das principais ações negociadas na Bovespa. Ele é formado a partir de uma aplicação imaginária, em reais, em uma quantidade teórica de ações (carteira). Sua finalidade básica é servir como indicador médio do comportamento do mercado. Para tanto, as ações que fazem parte do índice representam mais de 80% do número de negócios e do volume financeiro negociados no mercado à vista.

Para o mercado acionário dos Estados Unidos, conforme **(S&P Global, 2018)**, o índice que reflete a economia do país é medido pela S&P U.S. Índices, através do índice S&P 500, SPX, cujo se concentra no setor de alta capitalização (*large cap*), porém, levando em conta que ele inclui uma parte importante do valor total do mercado, também representa o mercado. As empresas que fazem parte do S&P 500 são consideradas líderes nas principais indústrias. O S&P 500 faz parte da família de índices do S&P Global 1200.

2.8 Identificação de frequências e padrões

Consistentemente após diversas crises já assistidas, os modelos tradicionais de acompanhamento de volatilidade dos mercados evidenciam o quão distante estão de conseguir alarmar um cenário de deterioração. Técnicas avançadas como

simulações de Monte Carlo possuem premissas que, comparadas historicamente com o realizado após crise instalada, não chegam nem perto da perda que muitos investidores já amargaram. Mais além, conforme (Leonel Caetano, 2013), os métodos quantitativos geralmente são vinculados ao tempo e ao passado, linearizando eventos não lineares e/ou aplicando distribuições estatísticas em cenários que claramente não seguem padrões, trazendo uma necessidade cada vez maior de aprofundar as análises nos espectros de oscilações e frequências, demandas oriundas do século XIX aplicadas à previsão do comportamento de molas e cordas, potencialmente aprimoradas após a invenção do cálculo diferencial e provocados pelo surgimento de indústrias, como a indústria bélica, por exemplo. O problema da época e que se encontra sinergia no estudo do mercado financeiro é o estudo da vibração presente na equação de calor e na precisão no comportamento balístico. Neste direcionamento, o matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 a 1830) trouxe grande contribuição, ao afirmar que qualquer função de uma variável, contínua ou discreta, poderia ser expandida em uma série sinuosa de múltiplos dessa variável, decompondo funções periódicas infinitas em séries trigonométricas convergentes, que levam o nome de séries de Fourier. Tal abordagem possibilitou solução de diversos problemas até aquele momento sem solução. Adiante, essa aproximação poderosa, quando analisada em tempo infinitesimal e contínuo, expande sua aplicação para observação de padrões de repetições, também conhecido como fenômenos harmônicos, e que levam o nome de transformada de Fourier (FFT de *Fast Fourier Transform* em inglês). Pelo lado prático, se o evento observado for periódico, a técnica de transformada de Fourier irá capturar e evidenciar qual a frequência de oscilação. Embora fascinante descoberta, a predição de crises ainda abre espaços não preenchidos, pois, para emitir alarmes “anti-criSES”, já não é suficiente constatar que um mercado à beira de uma crise possui um comportamento identificável de oscilação e repetição. Uma necessidade não tratada por Fourier está precisamente no tempo em que as mudanças de frequências ocorrem, espaço preenchido em teorias recentes de estudo nos domínios tempo-frequência, endereçados na teoria *Wavelet*.

O estudo de *wavelets*, pequenas ondas conforme (Modern Language Association (MLA), 1979), também sido aplicado em diversas áreas como medicina, meteorologia, etc, foi primeiramente aplicado à finanças nos anos 1990 e

trata exatamente do aprimoramento dessa necessidade observada, de, simultaneamente, conseguir dividir um sinal em vetores de frequência que evoluem ao longo do tempo, tornando possível decompor um sinal no que é chamado de tempo-frequência. Essa abordagem é um avanço significativo em relação à transformada de Fourier, pois é possível localizar precisamente cada frequência num instante de tempo específico.

Aplicado sobre a proposta de predição de crises, uma recente técnica de captura de mudanças abruptas proposta por (Leonel Caetano, 2013) une o estudo das séries temporais desprovidos de tendências e sazonalidades utilizando aproximações lineares e Fourier, abrindo caminho para a implementação da teoria *wavelet*, onde é apresentado um índice de mudanças abruptas variando entre zero e um, na intenção de, quanto mais próximo de um, mais provável uma reversão do comportamento dos preços.

Para entendimento da proposta e implementação computacional, uma introdução um pouco mais profunda sobre a teoria *wavelet* será disposta a seguir.

2.9 Introdução à teoria *wavelet*

A base da teoria *wavelet* surgiu com Alfred Haar, em 1909, antes de o modelo receber o nome de *wavelet*. Aplicado à variáveis discretas, Haar *wavelets* referem-se às operações matemáticas denominadas transformação Haar e são um protótipo para os outros tipos de transformações *wavelets*, mas que fornecem uma base sólida para entender os modelos mais sofisticados.

Para implementar algoritmos eficientes de decomposição de sinais em expansões (base das teorias de Fourier e *Wavelet*), as fases ou blocos cujos sinais são decompostos em senos, cossenos ou *wavelets* devem satisfazer diversas propriedades, em especial e conveniente são as propriedades de ortogonalidade (soma do produto dos vetores projetados resultar zero). A propriedade ortogonal da teoria *wavelet* produz novas técnicas para solucionar determinadas questões de previsão de fenômenos não endereçadas no passado. Diferente de outros filtros, cujas amplitudes são preservadas especificamente pelas propriedades de frequência

sem considerar o tempo, as amplitudes do modelo de *wavelets* preservam ambos aspectos.

Segundo (Leonel Caetano, 2013), *wavelet* representa uma ferramenta de análise de sinal cuja função é adaptar pequenas ondas a um conjunto de dados com a finalidade de extrair informação tais como padrões, fazer filtrações, ajustes de curva, etc.

Existem diferentes tipos de *wavelets* com complexidades distintas na formação das funções de decomposição. Na figura 2 são mostradas as funções *wavelets* mais disseminadas.

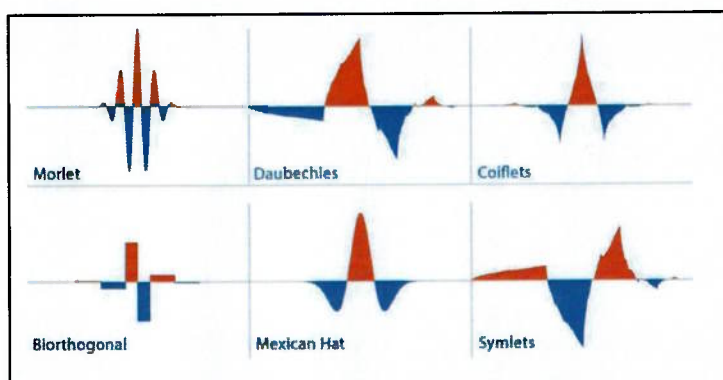


Figura 2: Diferentes famílias de *wavelets*. Fonte: MathWorks.

Complementarmente às dimensões de análise, é possível empregar a teoria *wavelet* em agregação temporal, isto é, compactar grandes volumes de dados disponíveis continuamente em uma unidade de tempo e transforma-los em intervalos discretos menos granulares, com propriedades severas que preservam o comportamento da amostra bruta, isto é, não descaracterizar os dados brutos após sua agregação. Esta frente não será abordada neste estudo, mas é destacada aqui dada relevância dessa aplicação no contexto de finanças, onde, dependendo da variável e necessidade de observação, o volume de dados pode ser inviável em nível granular.

Em resumo, conforme síntese de (Leonel Caetano, 2013), uma transformada *wavelet* possui em seu plano xy a disposição do sinal do tempo (eixo x) e as escalas, que são as frequências, dispostas no eixo y . O valor inverso dessas escalas representa as frequências, isto é, quanto mais acima no eixo y , mais baixa a frequência no movimento observado no tempo e, logicamente, quanto mais próximo

de zero no eixo y , mais frenéticos estão os dados dispostos no tempo. Computacionalmente, os valores provenientes da aplicação *wavelet* são identificados em tons de cinza e a disposição das cores e intensidades podem ser utilizados como indicativos de mudanças abruptas de valor de mercado ou preço. A figura 3 exemplifica a aplicação computacional da transformação *wavelet* sobre dados brutos quaisquer.

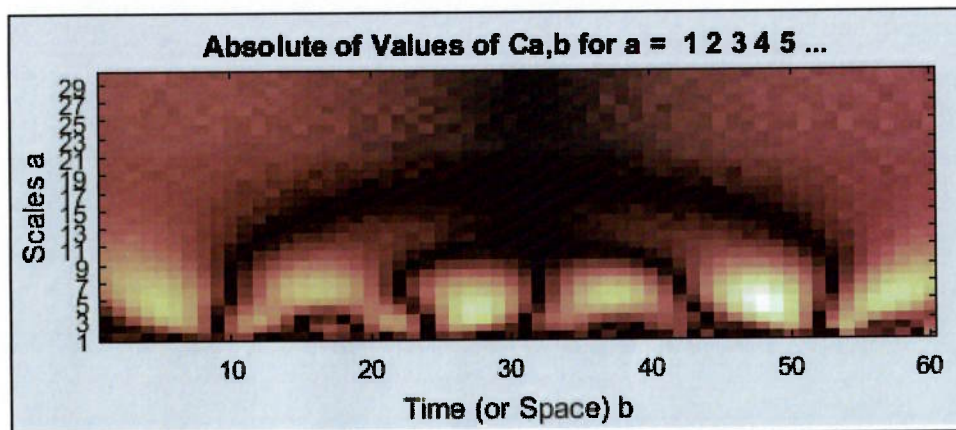


Figura 3: Transformada *wavelet* aplicada sobre uma série temporal. Fonte: Matlab.

Segundo (Ranta, 2010), o método de separar cada componente em bandas individuais de frequência é extremamente compatível com as características das variáveis dos setores econômico-financeiros, onde é possível obter melhores resultados de modelos de previsão separando os comportamentos das suas eventuais sazonalidades, também chamados de *stress* de mercado.

2.10 Wavelets

Wavelets literalmente são pequenas ondas, pois possuem um tamanho finito e oscilatório, isto é, iniciam em determinada unidade de tempo e finalizam (ou morrem) subsequentemente.

Na teoria *wavelet* existem filtros de baixa frequência, conhecido como filtro de escala (ϕ_t), os quais, dentro de uma banda estabelecida, preservam os componentes de frequência semelhante, e de alta frequência, conhecido como filtro

wavelet (ψ_t), os quais operam inversamente ao primeiro, ignorando os componentes de baixa frequência sob o mesmo intervalo estabelecido.

Por definição, a função de escala deve satisfazer duas condições:

$$1: \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 1,$$

$$2: \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t-k)\phi_0(t-j) dt = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

A função *wavelet* deve satisfazer outras duas condições:

$$1: \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(t) dt = 0,$$

$$2: \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(t-k)\psi_0(t-j) dt = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

A segunda condição das funções escala e *wavelet* garante que são funções ortogonais.

Supondo que exista um plano V_0 , este pode ser decomposto ortogonalmente em muitos outros diferentes sub-planos $W_1, W_2, W_3, \dots$. Adiante, o plano V_0 , que possui um intervalo de frequências $[0, \pi]$, pode ser decomposto ortogonalmente em dois sub-planos W_1 e V_1 , que correspondem respectivamente às bandas de frequência $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $[0, \frac{\pi}{2}]$. A ortogonalidade dos sub-planos garante que a soma deles leva ao plano original, representado por $W_1 \oplus V_1 = V_0$. V_1 , que pode ser decomposto novamente em dois sub-planos ortogonais W_2 e V_2 com frequências $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ e $[0, \frac{\pi}{4}]$. Decompor os planos das funções escala j vezes até obter os sub-planos W_j e V_j reduz o esforço computacional e traz eficiência. Pode ser representado matematicamente conforme:

$$\begin{aligned} V_0 &= W_1 \oplus V_1 \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus V_2 \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \dots \oplus V_j \end{aligned}$$

Para a função $f(t)$ ($t = 0, \dots, T-1$, com $T = 2^J$) em V_0 , a projeção de $f(t)$ em W_1 é $\Delta f(t)$ e a projeção de $f(t)$ em V_1 é $f_1(t)$. Como $V_0 = W_1 \oplus V_1$, $f(t) = \Delta f_1(t) + f_1(t)$. Dado algoritmo de pirâmide, $f(t)$ pode ser escrita como combinação linear de $\Delta f_j(t)$ ($1 \leq j \leq J$) e $f_j(t)$: $f(t) = \sum_{j=1}^J \Delta f_j(t) + f_j(t)$. Essa abordagem é praticamente a definição de análise em multiresolução (MRA de *multiresolution analysis* em inglês), principal conceito da teoria *wavelet*.

Convergingo as definições até aqui, $f_j(t)$ pode ser aproximado por $\phi_j(t)$ enquanto $\Delta f_j(t)$ pode ser expresso por $\psi_j(t)$, com padrões de relações importantes definidos em equações de dilatação ou compressão, conhecidas como equação de dilatação e equação *wavelet*.

2.11 Equação de dilatação e equação *wavelet*

No sub-plano $V_1 \in V_0$, V_1 abrange a função base da parte escala $\phi_1(t)$, enquanto V_0 é constituído pela função base de $\phi_0(t)$. Essas duas funções seguem a relação abaixo:

$$\phi_1(t) = 2^{-1/2} \phi_0(2^{-1}t)$$

Esta relação também pode ser escrita como:

$$\phi_0(t) = 2^{1/2} \phi_1(2t)$$

Dada recursividade, a relação pode ser generalizada conforme:

$$\phi_j(t) = 2^{-j/2} \phi_0(2^{-j}t)$$

Como o sub-plano V_1 é metade de V_0 , a fração de tempo na função escala também é reduzida pela metade e é igual a $2^{-1}t$.

$\phi_1(t)$ é a versão dilatada de $\phi_0(t)$, e a versão transformada é $\phi_1(t-k)$, que é uma função da base ortogonal de V_1 . Consequentemente, $\phi_1(t-k) = 2^{-1/2} \phi_0(2^{-1}t-k)$, chamada de versão transformada dilatada de $\phi_0(t)$. A versão genérica da função escala é definida por:

$$\phi_{j,k} = 2^{-j/2} \phi_0(2^{-j}t-k), k = 0, \dots, \frac{T}{2^j} - 1$$

A porção do tempo t na função escala $\phi_0(t)$ é de 0 até $T - 1$ e representa metade da função escala $\phi_1(t)$, de 0 até $(T - 1)/2$. A função transformada $\phi_1(t - k)$ inicia no tempo $t = k + 0$ e termina no tempo $t = k + (T - 1)/2$.

Em conclusão, a função escala $\phi_0(t - k); k = 0, \dots, T - 1$ existe para cada observação da série observada, acompanhada da função *wavelet* em pontos alternados. Para cada nível de decomposição, as sucessões das funções escala e *wavelet* abrangem toda a amostra de dados.

Por conta do sub-plano V_1 estar contido em V_0 , $\phi_1(t)$ é um elemento de base do plano V_0 assim como $\phi_0(t)$. A expressão apropriada da relação entre os elementos é:

$$\phi_1(t) = \sum_k g_k \phi_0(t + k) = 2^{1/2} \sum_k g_k \phi_1(2t + k)$$

Esta equação é conhecida como equação de dilatação (*dilation equation* em inglês), onde $g_k = \langle \phi_1(t), \phi_0(t + k) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(t) \phi_0(t + k) dt$, conhecido como filtro de escala.

A equação *wavelet* é análoga, conforme:

$$\psi_j = 2^{-j/2} \psi_0(2^{-j}t)$$

A versão transformada e dilatada da função *wavelet* é:

$$\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi_0(2^{-j}t - k), k = 0, \dots, \frac{T}{2^j} - 1$$

Pelas propriedades embutidas de ortogonalidade e relação entre os sub-planos, é possível escrever a função *wavelet* $\psi_1(t)$ como uma combinação linear dos elementos base de V_0 . A equação mais apropriada é:

$$\psi_1(t) = \sum_k h_k \phi_0(t + k) = 2^{1/2} \sum_k h_k \phi_1(2t + k)$$

Esta equação é conhecida como equação *wavelet* (*wavelet equation* em inglês), onde $h_k = \langle \psi_1(t), \phi_0(t + k) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(t) \phi_0(t + k) dt$ é chamado de filtro *wavelet*.

Em conclusão, os filtros h_k e g_k devem satisfazer três importantes condições:

$$\sum h_k = 0, \sum h_k^2 = 1, \sum h_k h_{k+2m} = 0 \ (m \neq 0),$$

$$\sum g_k = \sqrt{2}, \sum g_k^2 = 1, \sum g_k g_{k+2m} = 0 \ (m \neq 0),$$

Existem ainda outras condições para garantir a ortogonalidade mútua entre os planos, porém para o propósito de introdução à teoria, as condições formalizadas acima são suficientes e garantem que ambas as funções são ortogonais em suas próprias decomposições em diferentes deslocamentos, construindo a base ortogonal dos sub-planos W_j ou V_j .

É pertinente definir a relação entre as funções *wavelet* e escala, como:

$$g_k = (-1)^{k+1} h_{L-k-1}$$

E a relação inversa:

$$h_k = (-1)^k g_{L-k-1}$$

Onde L é a largura do filtro e deve ser uniforme. Os filtros g_k e h_k são respectivamente de baixa e alta frequência, preservando os componentes dessas naturezas.

2.12 Decomposição da função no plano V_0

Compactando a teoria descrita até este ponto, o plano V_0 pode ser decomposto ortogonalmente em dois sub-planos W_1 e V_1 , construídos pelas funções de escala $\phi_1(t)$ e *wavelet* $\psi_1(t)$ respectivamente. A consequência é que a função contínua $f(t)$ que pertence ao plano V_0 pode ser decomposta em elementos dos sub-planos W_1 e V_1 , conforme:

$$f(t) = f_1(t) + \Delta f_1(t)$$

Onde $f_1(t)$ é a projeção de $f(t)$ no sub-plano V_1 e $\Delta f_1(t)$ é a projeção de $f(t)$ no sub-plano W_1 .

A ilustração básica da aplicação da teoria *wavelet* sobre um sinal é:

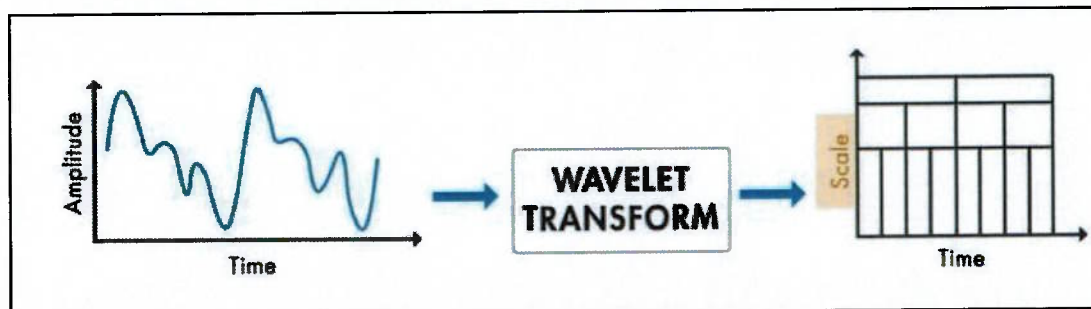


Figura 4: Ilustração da transformação *wavelet*. Fonte: *MathWorks*.

Aplicando um maior zoom no potencial da decomposição (“microscópio matemático”):

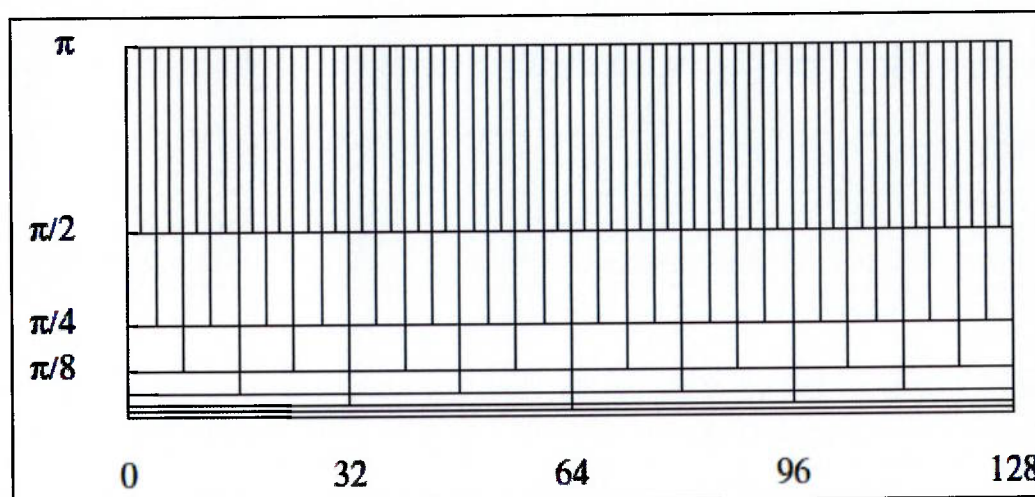


Figura 5: Partição do plano em tempo-frequência, observação de 2^7 pontos. Fonte: (Lai, 2015).

2.13 IMA – Índice de mudanças abruptas

A proposta do índice, segundo (Leonel Caetano, 2013), é formar um indicador alarmante em um cenário de pré-crise. Utilizando e compactando a teoria disposta nos tópicos supracitados, o autor sugere a criação de um índice medido através da intensidade com que a decomposição *wavelet* em tons de cinzas e brancos aparece, conforme tratamento aplicado à série financeira selecionada para o estudo.

A construção do índice IMA começa então com a formatação dos dados para a construção do espectro *wavelet*. Uma transformada *wavelet* necessita que a média dos dados observados seja nula. Isso significa que dados de bolsa de valores não podem ser utilizados diretamente pela transformada. O primeiro passo é retirar a tendência linear dos preços e em seguida, deve-se eliminar a sazonalidade do conjunto de dados. Para isso, uma função periódica deve ser ajustada, onde Fourier se encaixa perfeitamente. O resultado dos dois passos é o ruído de fundo da série de dados, não apenas um ruído com média zero, mas sim um ruído com informações "preciosas" do mercado, as quais se pretende interpretar através da transformada *wavelet*.

Esta técnica recente vem sendo aplicada historicamente sobre crises passadas e vem apresentando bons resultados sobre os ruídos de bolsas de valores, quando próximos de mudanças abruptas. Conforme (Leonel Caetano, 2013), o que está se revelando é que esse padrão ocorre com dados das bolsas de valores, onde apesar de não serem singularidade teórica, diversos *crashes* estudados podem ter antecipações avisadas no espectro das *wavelets*.

Voltando à composição do índice IMA sobre a transformação *wavelet*, os coeficientes da transformada indicam que, quanto mais intensidade de branco, mais coeficientes tomam importância no conjunto de dados, logo, visto que primeiro quem sempre aparece são as representações de alta frequência, o ideal é sempre saber se todos os coeficientes estão brancos no dia mais recente e normalizá-los em termos do maior, para se obter números entre 0 e 1. Normalizando pela quantidade total de coeficientes, se tem um índice que, quando está em zero, significa que só existem coeficientes de baixa frequência e mercado sem chance de virada. Quando se tem número 1, mercado estressado com altíssima probabilidade de virada.

3 Metodologia

3.1 Coleta de dados

Os dados empíricos utilizados para a proposta são disponibilizados regularmente na internet, em provedores como a própria bolsa de valores e outras fontes referências de disponibilização como Yahoo *Finance*. Os custos de coleta são relativamente baixos, uma vez que as informações são públicas e existem inúmeros contratos realizados diariamente, o que traz também segurança e confiabilidade aos dados divulgados.

3.2 Eliminação de tendências na série financeira

Como primeiro exemplo prático, em posse dos dados brutos do fechamento diário do índice Ibovespa, que contem em sua extensão extraída o período da crise de 2008, com quedas bruscas de preço no período de maio de 2008, o passo inicial para cálculo do índice IMA é fatiar a série bruta em janelas de curtos períodos, para traçar a reta que melhor se ajusta aos pontos de cada janela. No *software* utilizado para o cálculo, Matlab da *Mathworks*, a função que calcula o polinômio de grau n utilizando o método dos mínimos quadrados para melhor ajuste da função, que para este caso se deseja uma reta e utiliza-se grau um, chama-se *polyfit*. A figura 6 mostra a aplicação da função traçada em vermelho sobre uma janela de dados brutos de quarenta dias, traçados em azul.

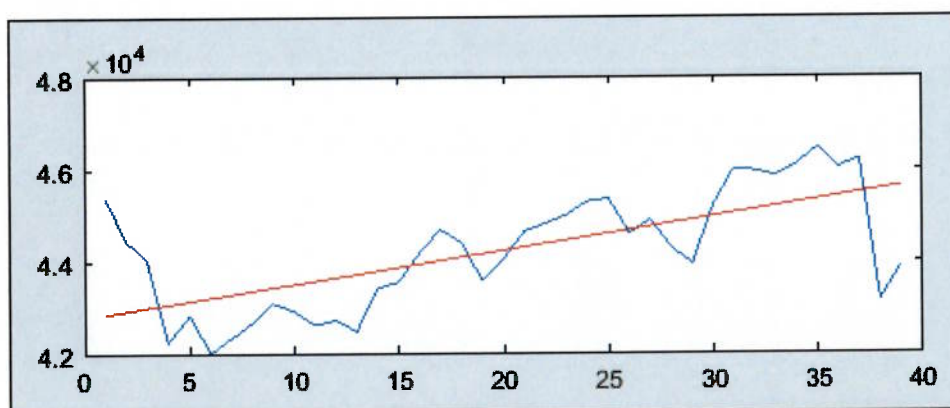


Figura 6: Utilização da função *polyfit* em Matlab, traçando uma reta nos dados brutos.

Como segundo passo, visando eliminar as tendências da janela observada, deve-se subtrair as duas funções, a plotada com os dados brutos e a plotada com a função linear ajustada. O resultado, como objetivo, é uma série desprovida de tendências, exibida na figura 7.

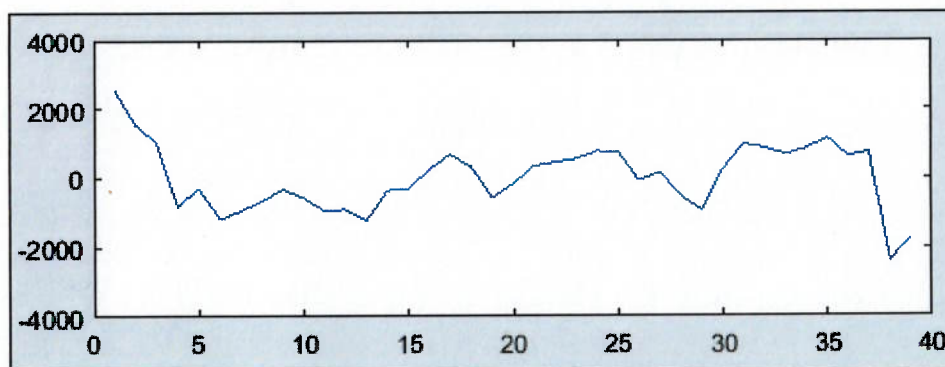


Figura 7: Resultado da subtração das funções plotadas na figura 6, *software* Matlab.

No procedimento implementado em código Matlab, a variável que recebe o tamanho da janela de dias foi apelidada de *window size*.

3.3 Eliminação de sazonalidade na série financeira

Com o resultado obtido na figura 7, o próximo passo de preparação consiste em aproximar os dados em senos e cossenos, utilizando a teoria de Fourier. A função que aplica a aproximação no *software* Matlab é a função FFT (*Fast Fourier Transform*), exibida em vermelho na figura 8.

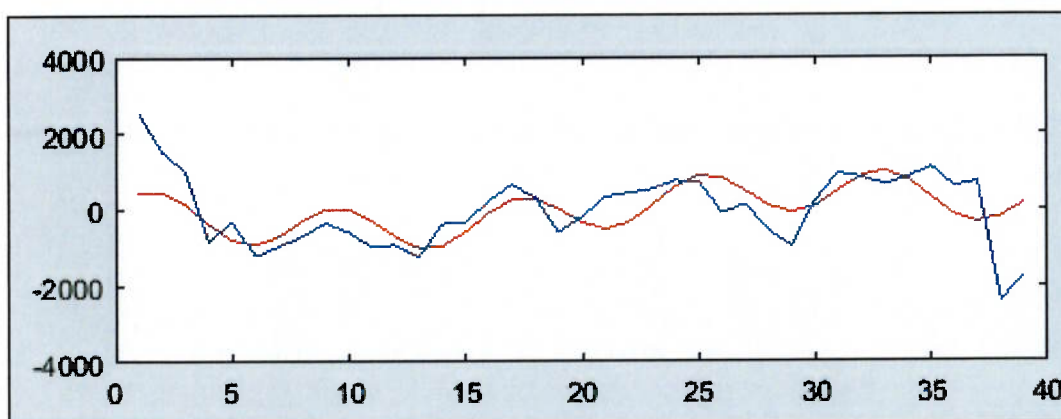


Figura 8: Aplicação da função FFT nos dados dispostos na figura 7, *software* Matlab.

Para cumprir o objetivo dessa etapa, é necessário novamente subtrair os dados das duas funções plotadas, de maneira a resultar no denominado ruído da janela observada que, segundo a técnica, expõe os dados desprovidos de tendência e de sazonalidade, que é periódica e é capturada pela transformada de Fourier. A figura 9 exibe o resultado da subtração.

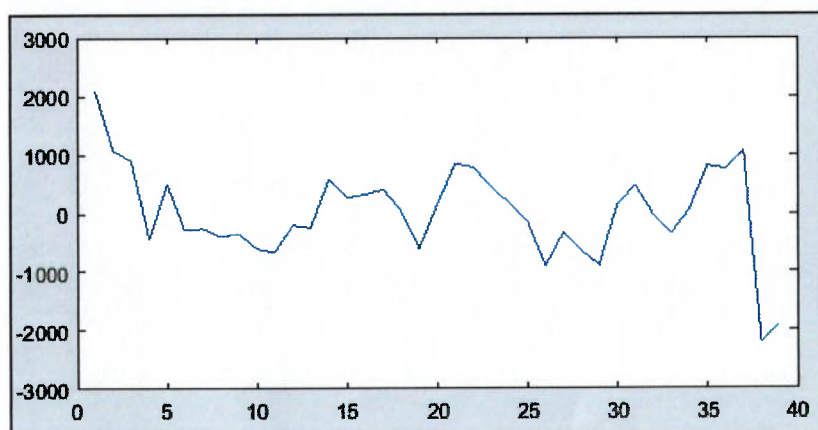


Figura 9: Subtração das funções plotadas na figura 8, *software* Matlab.

3.4 Aplicação da transformação *wavelet*

Sobre o resultado obtido na figura 9, denominado por ruído, cumprindo uma das exigências da teoria *wavelet* de estacionariedade, se aplica a função de transformação contínua utilizando uma das famílias disponíveis. Seguindo a recomendação de (Leonel Caetano, 2013), a família *Mexican Hat* (chapéu mexicano) possui uma boa configuração para os dados da bolsa de valores. A figura 10 exibe o resultado da aplicação da transformação.

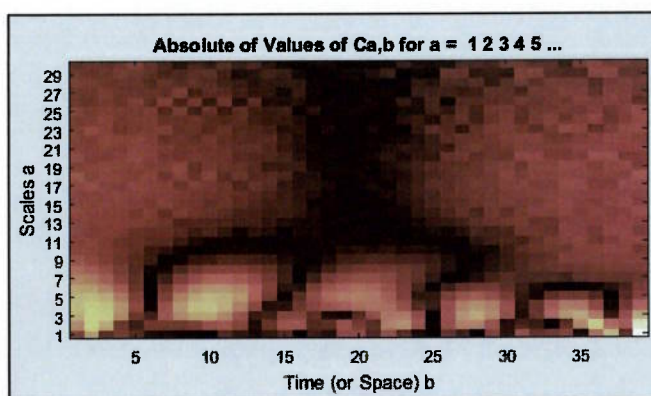


Figura 10: Aplicação da transformação *wavelet*, família mexh, sobre a figura 9, *software* Matlab.

No procedimento implementado em código Matlab, a variável que recebe a escala de frequências foi apelidada de *wFreq* e a que armazena o valor dos coeficientes resultantes da transformação foi apelidada de *wt*.

3.5 Cálculo do IMA

Como último passo para o cálculo do indicador proposto, se faz necessário a criação de um numerador menor ou igual a um denominador, tendo como fonte de entrada os coeficientes resultantes da transformada *wavelet*, dispostos em imagens de diferentes tonalidades de branco e cinza. Para tanto, a imagem é fatiada igualmente em retângulos que cobrem todo o eixo de frequências (eixo *y*), onde, para o último retângulo, que contem o espaço onde o dia mais atual da janela aparece, é realizada a análise de quantos tons fortes, isto é, acima de um determinado fator ou limiar, aparecem dentro de todos os tons presentes no corte. Importante notar que é um conceito simples, mas que condiz com a definição da metodologia *wavelet*, o qual mostra em tons mais fortes as frequências com mais “nervosismo”, que, para cenários de crise, se traduzem em relevância.

No procedimento implementado em código Matlab, a variável que recebe o tamanho da janela para cômputo do IMA foi apelidada de *imatime* e a variável utilizada para cômputo do numerador do índice foi apelidada de *Limiar*.

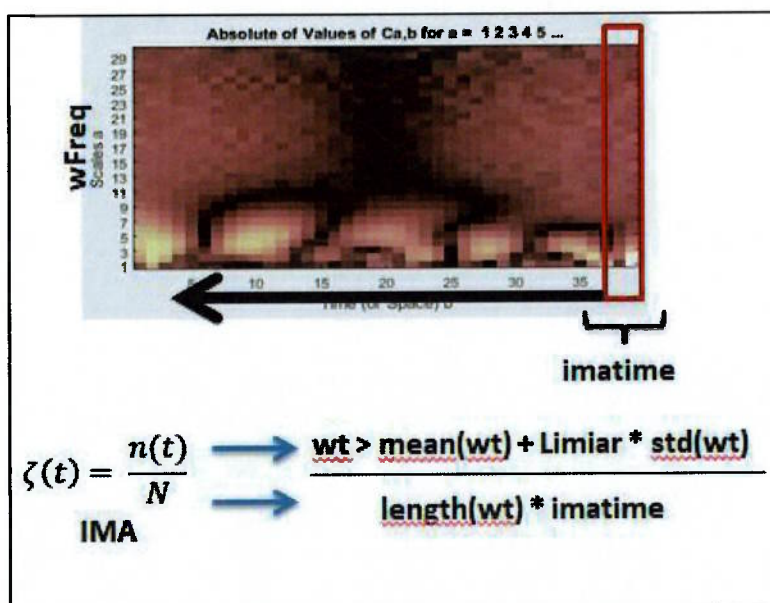


Figura 11: Cálculo IMA sobre a transformada *wavelet*, *software* Matlab.

4 Resultados

Os diferentes parâmetros explicados nos tópicos do capítulo de metodologia devem possuir uma condição inicial, a qual não se conhece a configuração ótima, que, dada complexidade dos recursos utilizados, não se trata simplesmente de um problema de maximização.

As figuras a seguir são testes empíricos simulando diferentes valores para os parâmetros, onde poderá ser evidenciado um resultado significativo, atendendo o objetivo de sinalização de pré-crise para dois índices de dois mercados completamente distintos.

Para o índice Ibovespa, a melhor configuração obtida foi representada na figura 10, onde o IMA atingiu 0.89 e pode-se observar uma desvalorização da cotação do fechamento do índice de mais de 100% em um horizonte de quatro meses após este pico.

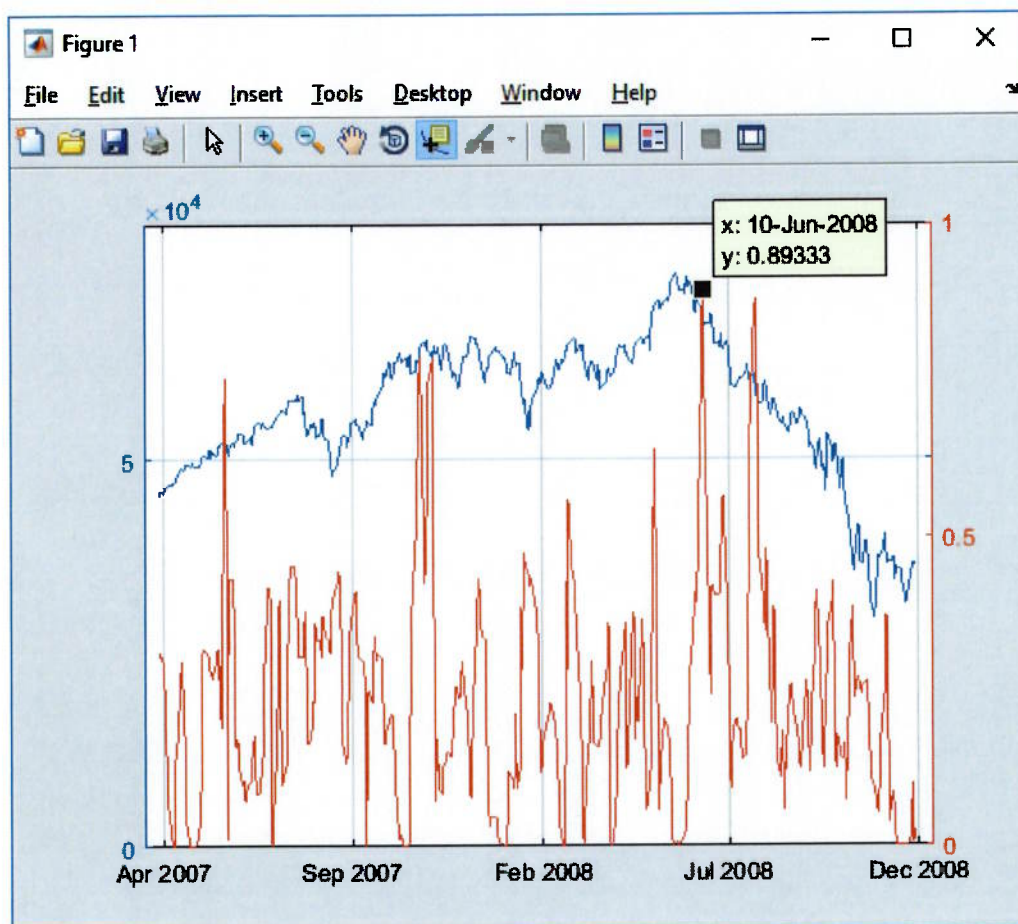


Figura 12: Maior IMA obtido sobre o índice Ibovespa, período de Jan/07 à Dez/08, *software* Matlab.

Para o índice SPX, o maior valor obtido para o IMA foi de aproximadamente 0.93. Dois meses após o pico, observou-se uma desvalorização do preço de cotação de mais de 60%.

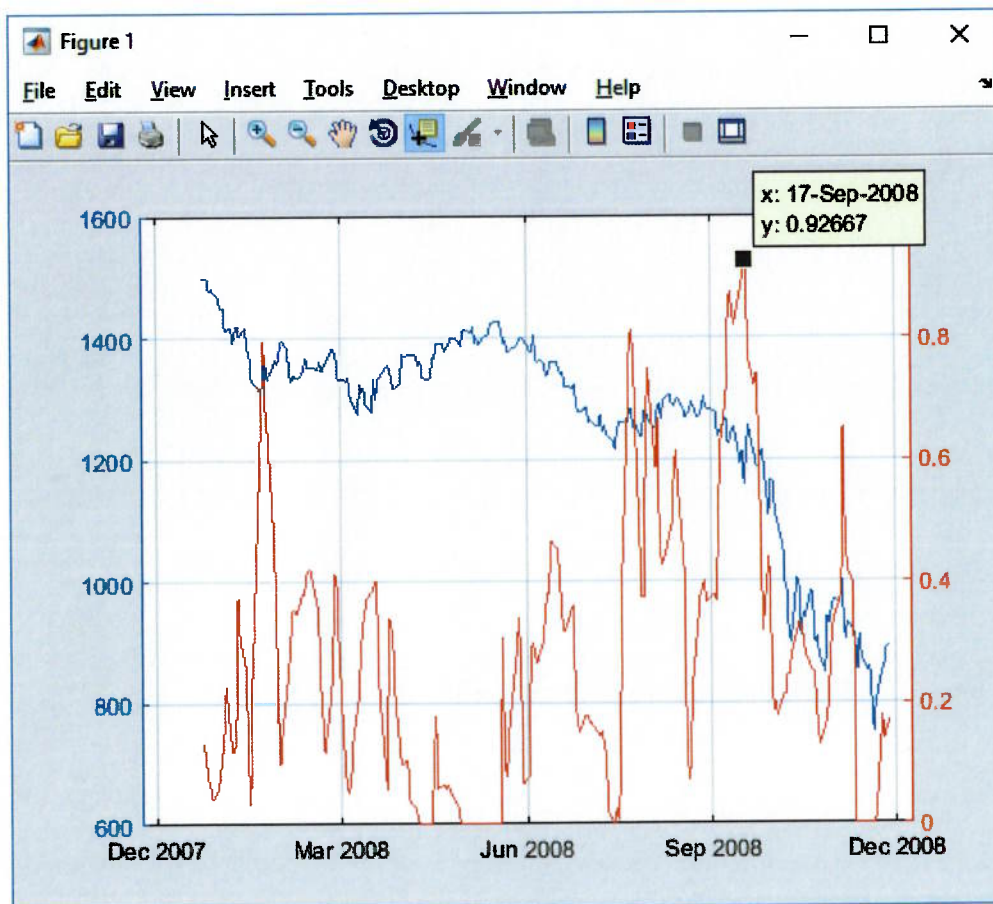


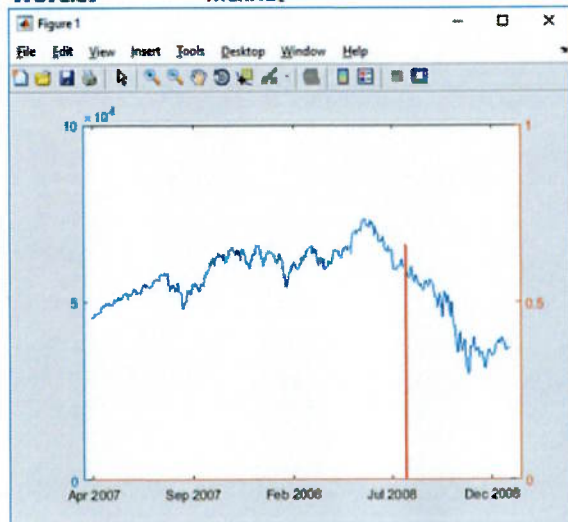
Figura 13: Maior IMA obtido sobre o índice SPX, período de Out/07 à Dez/08, software Matlab.

Cabe o conservadorismo de que os resultados obtidos no estudo não são suficientes para assegurar que a técnica prevê crises, mas dão forte sinal de aderência com o objetivo proposto pela teoria de mudanças abruptas.

As próximas figuras são referentes há experimentos nas configurações dos parâmetros. Em alguns exemplos a trajetória do IMA foi suprimida, para identificar somente o ponto máximo do índice.

windowSize	60
imaTime	10
limiar	0.6
wFreq	30

Wavelet MexHat



windowSize	80
imaTime	10
limiar	0.6
wFreq	30

Wavelet MexHat

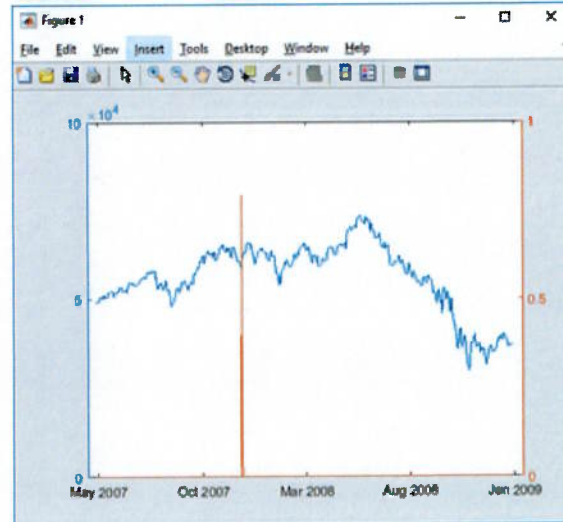
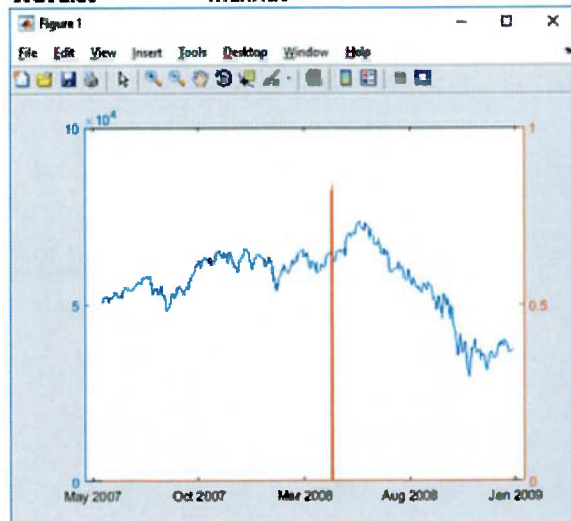


Figura 14: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. Ibovespa entre Jan/07 à Jan/09, software Matlab.

windowSize	90
imaTime	10
limiar	0.6
wFreq	30

Wavelet MexHat



windowSize	100
imaTime	10
limiar	0.6
wFreq	30

Wavelet MexHat

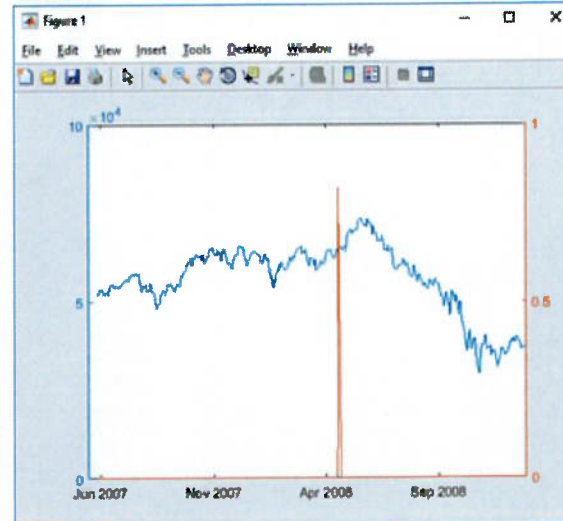
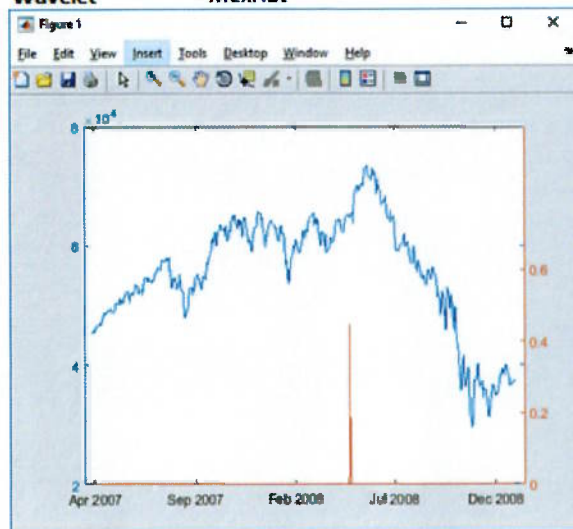


Figura 15: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. Ibovespa entre Jan/07 à Jan/09, software Matlab.

windowSize	60
imaTime	20
limiar	0.6
wFreq	30

Wavelet MexHat



windowSize	80
imaTime	20
limiar	0.6
wFreq	30

Wavelet MexHat

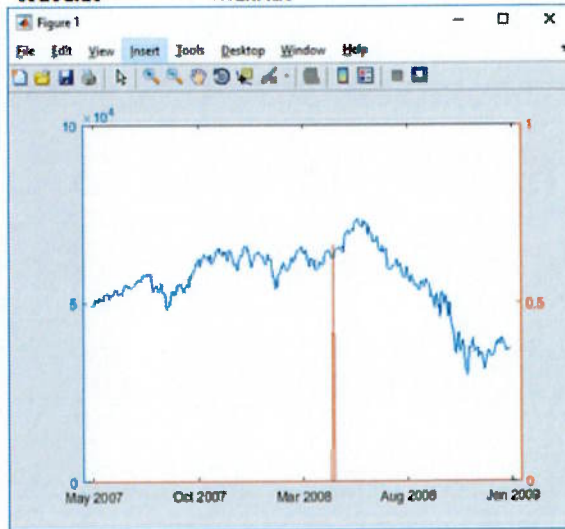
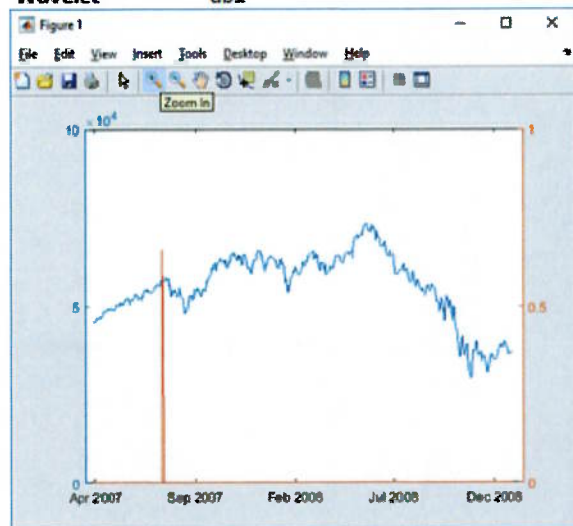


Figura 16: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. Ibovespa entre Jan/07 à Jan/09, software Matlab.

windowSize	60
imaTime	10
limiar	0.6
wFreq	30

Wavelet db1



windowSize	80
imaTime	10
limiar	0.6
wFreq	30

Wavelet db1

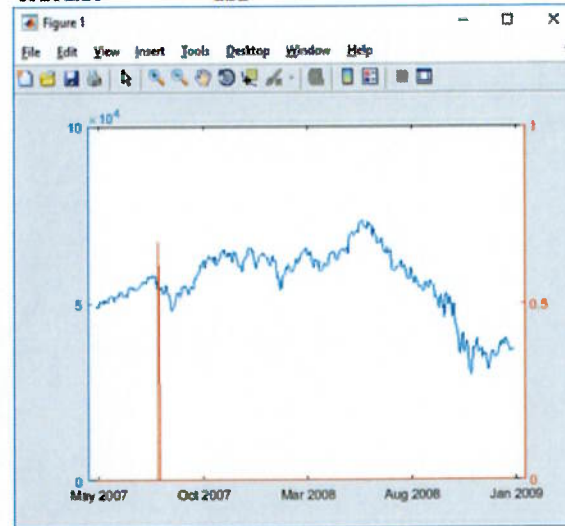
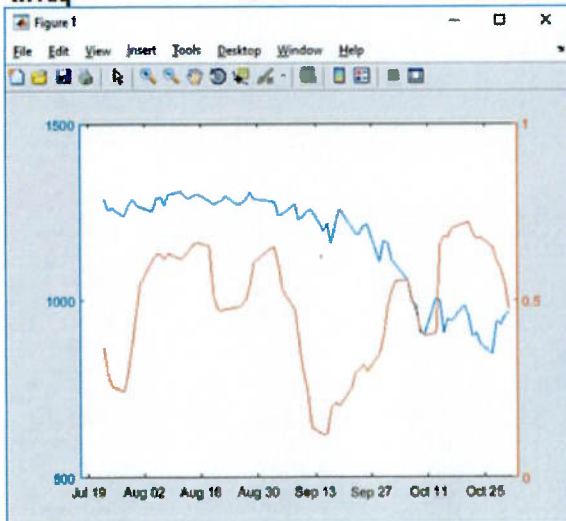


Figura 17: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. Ibovespa entre Jan/07 à Jan/09, software Matlab.

windowSize	100
imaTime	10
limiar	0.7
wFreq	30



windowSize	100
imaTime	20
limiar	0.7
wFreq	30

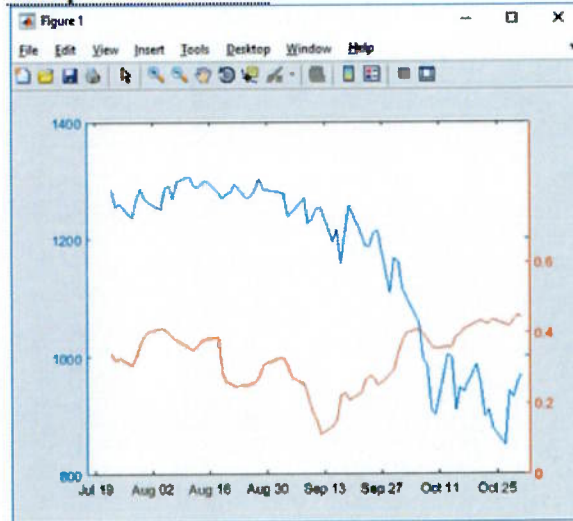
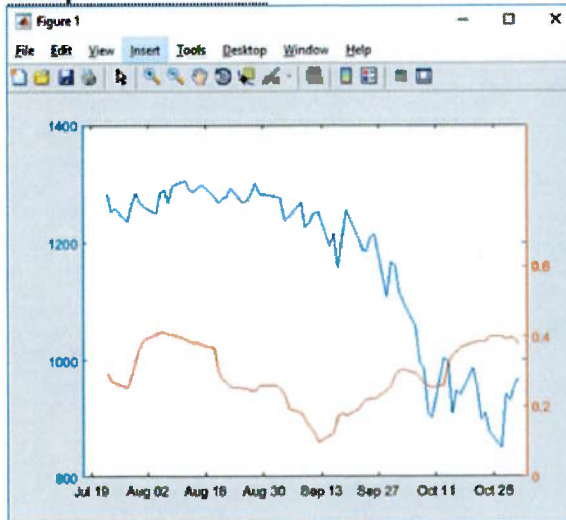


Figura 18: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. S&P500 entre Mar/08 à Nov/08, software Matlab.

windowSize	100
imaTime	30
limiar	0.7
wFreq	30



windowSize	100
imaTime	40
limiar	0.7
wFreq	30

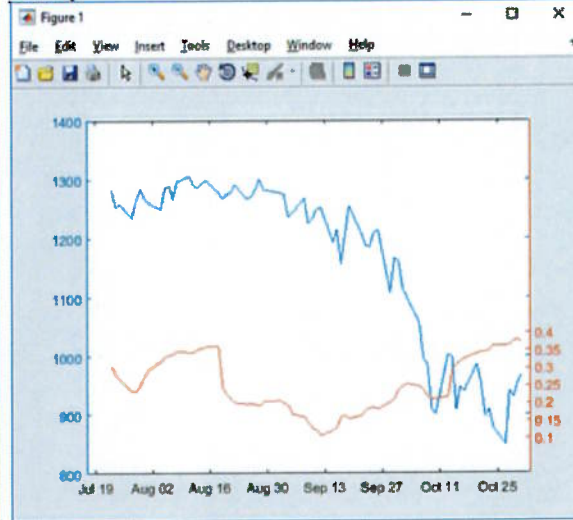
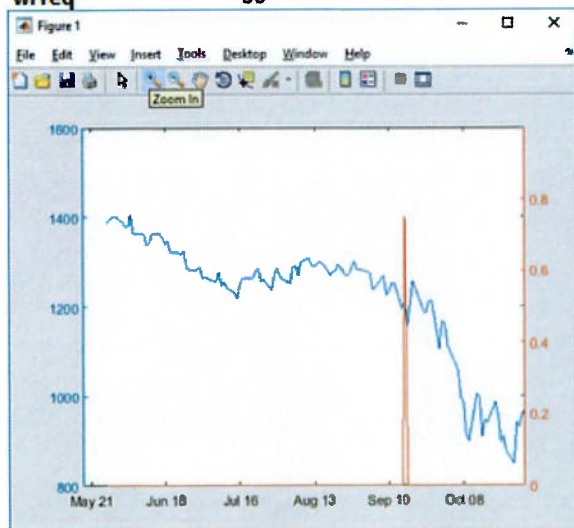


Figura 19: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. S&P500 entre Mar/08 à Nov/08, software Matlab.

windowSize	60
imaTime	10
limiar	0.5
wFreq	30



windowSize	60
imaTime	10
limiar	0.8
wFreq	30

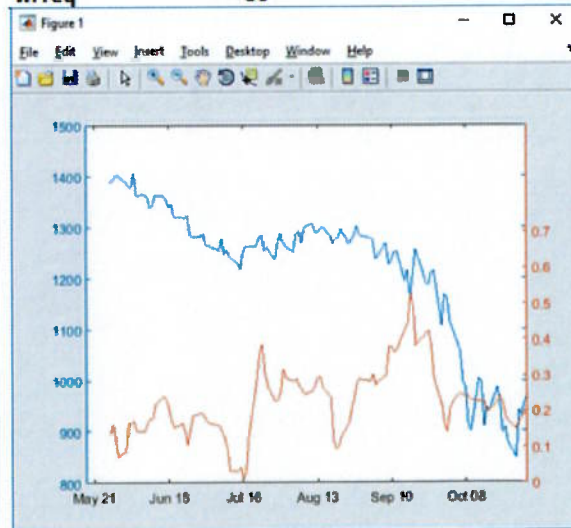


Figura 20: Cálculo IMA com diferentes parâmetros. S&P500 entre Mar/08 à Nov/08, software Matlab.

Olhando o melhor resultado por índice avaliado, a única variável que não apresentou similaridade no êxito foi a variável *imaTime*, que, conforme definido na seção 3.5, é a variável responsável pelo tamanho da janela para cômputo do IMA. Para o índice Ibovespa o índice foi maximizado em janela unitária, já para o SPX, foi necessário aumentar a janela para maximizar o resultado.

5 Conclusões

Diversos autores reconhecidos no meio quantitativo afirmam a relevância da utilização da teoria *wavelet* aplicado sobre o mercado financeiro, devido as características da teoria e do próprio mercado. O principal diferencial desta metodologia de estudo de sinais, segundo a própria implementação da teoria no *software* de cálculo numérico utilizado neste estudo, é que as transformações sumarizam as correlações entre os sinais e as funções de análise, com propriedades físicas de frequência, escala e posição, que aprimoram e dão condição de interpretação do mecanismo que gerou o sinal em estudo, no caso particular desta aplicação, o mecanismo é a captura do fenômeno que antecede uma crise no mercado.

Como apresentado, o produto final da compilação de toda a teoria presente na proposta do **(Leonel Caetano, 2013)** é um índice variando entre zero e um, onde quanto mais perto de um, mais provável a mudança abrupta no comportamento da série financeira em avaliação.

Importante destacar que os índices avaliados são provenientes de mercados completamente distintos, porém apresentaram um alto valor do indicador em momento anterior à mudança abrupta, com parâmetros significativamente similares.

Embora tenha sido possível e interessante obter um alto índice em momentos visivelmente de pré-crise, a conclusão deste estudo é que os testes empíricos realizados nos moldes dispostos em capítulo de apêndice mostram uma abordagem diferente das tradicionais, com fortes indícios de tradução pré-crise, porém ainda não suficientes para validar a técnica proposta, e que se faz necessário alterações de diferentes trechos, em particular no cômputo do IMA, além de diversificação de mais cenários em mais mercados, a fim de evoluir e gerar segurança em sua promissora aplicação.

6 Bibliografia

- Alvares, L. O. (s.d.). *Análise exploratória de Dados. AED*. Acesso em 10 de 09 de 2017, disponível em UFSC. INE. Departamento de Informática e Estatística: <http://ine.ufsc.br>**
- BM&F Bovespa. (05 de 2015). *Bolsa de Valores*. Acesso em 22 de 01 de 2018, disponível em Metodologia do índice Ibovespa: bmfbovespa.com.br**
- Boggess, A., & Narcowich, F. J. (2002). *A first Course in Wavelets with Fourier Analysis*. Texas: Prentice Hall.**
- Carvalho, U. T., Tinoco Aboim Costa, L. G., de Melo Gonçalves, H., & Fernandes Limeira, A. F. (2011). *Análise Econômico-Financeiro de Empresas*. Rio de Janeiro: FGV Managment.**
- Duarte Junior, A. M. (2013). *Análise de investimentos em projetos, viabilidade financeira e risco*. São Paulo: Saint Paul.**
- Fabris, A. E. (07 de 2012). *Gestão de Riscos. Métodos Quantitativos*, capítulo 3. Inferência estatística e intervalo de confiança. São Paulo, SP, Brasil.**
- Fabris, A. E. (07 de 2012). *Gestão de Riscos. Métodos Quantitativos*, capítulo 4. Retornos e volatilidade. São Paulo, SP, Brasil.**
- Fernandes Andrezo, A., & Siqueira Lima, I. (2012). *Curso de Mercado Financeiro*. São Paulo: Atlas SA.**
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.**
- Hull, J. C. (2006). *Options, Futures and Other Derivatives*. Boston: Pearson Prentice Hall.**
- Lai, W. (01 de 05 de 2015). *Wavelet Theory and Its Applications in Economics and Finance. PhD Thesis*. Leicester, Reino Unido, Inglaterra: Universidade de Leicester.**

- Leonel Caetano, M. A. (2013). *Mudanças abruptas no mercado financeiro*. São Paulo: Érica Ltda.
- Menezes Reis, M. (21 de 08 de 2014). *INE 7001 Análise de Séries Temporais*. Acesso em 20 de 10 de 2017, disponível em UFSC. INE. Departamento de Informática e Estatística: <http://ine.ufsc.br>
- Modern Language Association (MLA). (1979). *Collins English Dictionary*. Acesso em 27 de 11 de 2017, disponível em Dictionary.com: <http://www.dictionary.com/browse/wavelet>
- Moura Cintra Goulart, A., Sampaio Franco de Lima, G. A., & Gregório, J. (2012). *Curso de Mercado Financeiro*. São Paulo: Atlas SA.
- Nguyen, T., & He, T.-X. (16 de 10 de 2015). Research & Reviews: Journal of of Statistics and Mathematical Sciences. *Wavelet Analysis and Applications in Economics and Finance*. Bloomington, USA, Estados Unidos da América: Illinois Wesleyan University.
- Ranta, M. (2010). *Wavelet multiresolution analysis of financial time series*. Vaasa, Finlândia: Vaasan Yliopisto.
- S&P Global. (01 de 01 de 2018). *S&P Dow Jones Índices*. Acesso em 01 de 2018, disponível em Metodologia índice S&P500: <http://www.portugues.spindices.com/indices/equity/sp-500>
- Soares, F., Frozza, R., & Panta Pazos, R. E. (16 de 08 de 2008). Artigo apresentado no XXVIII encontro nacional de engenharia de produção. *Predição de séries temporais financeiras utilizando wavelets e a rede neural TLFN distribuída*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: ENEGEP.
- Walker, J. (1999). *A primer on wavelets and their scientific applications*. Wisconsin: Chapman & Hall/CRC.

7 Apêndices

Função para extração de tendência e sazonalidade:

```
function z = removeTrend(x)
    x = x(:);
    N = length(x);
    t = (1:N)';
    % Remove Linear Trend
    c = polyfit(t, x, 1);
    linearTrend = c(1) * t + c(2);
    y = x - linearTrend
    % Remove Seasonal Trend
    a = fft(y);
    i = abs(a) < 0.8 * max(abs(a));
    a(i) = 0;
    sazonalTrend = real(ifft(a));
    z = y - sazonalTrend;
end
```

Implementação do cálculo IMA:

```
windowSize = 60;          %Size of window for IMA analysis
imaTime     = 5;          %# time intervals used to calculate IMA
limiar      = 0.6;        %threshold for ima pixel detection
wFreq       = 30;         %Escala da análise wavelet

%Ibovespa
[price, date] = readIbovespa('BVSP.csv');
ind = date >= datetime(2007, 1, 1) & date < datetime(2009, 1, 1);

price = price(ind);
date = date(ind);
N = length(price);

% Allocate IMA vector
ima = zeros(size(price));

for ind = windowSize:N
    begInd = ind - windowSize + 1;
    endInd = ind;
    data = price(begInd:endInd);
    data = removeTrend(data, debugTrend);
    wt = cwt(data, [1:wFreq], 'mexh');
    wt = abs(wt);
    indBigValues = wt(:, end-imaTime+1:end) > mean(wt(:)) +
    limiar*std(wt(:));
    imaTemp = sum(sum(indBigValues)) / (length(wt(:, end)) * imaTime);

    ima(ind) = imaTemp;
end

[ax h1 h2] =
plotyy(date(windowSize:end), price(windowSize:end), date(windowSize:end), ima(
windowSize:end))
```